3. Tutorium - Theoretische Mechanik

06.11.19

① Konservative Kraftfelder (Aufgabe 6)

überprüfe, ob $\vec{K} = \vec{a} \times \vec{r}$ ein Potential besitzt:

$$
\begin{aligned}
[\text{rot}\,\vec{K}]_i &= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, [\vec{a} \times \vec{r}]_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, a_l\, r_m \\
&= \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm}\, \partial_j\, a_l\, r_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, \partial_j\, a_l\, r_m \\
&= \underbrace{\partial_j\, a_i\, r_j} - \partial_j\, a_j\, r_i \\
&= a_i \underbrace{\partial_j r_j}_{*} - \underbrace{\partial_j r_i}_{\delta_{ij}} a_j \\
&= 3a_i - \delta_{ij}\, a_j \\
&= \underline{\underline{2a_i}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Im Allgemeinen kein Potential

$$
\begin{aligned}
* \quad \partial_j r_j &= \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \\
&= \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z \\
&= 3
\end{aligned}
$$

überprüfe, ob $\vec{K} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})$ ein Potential besitzt:

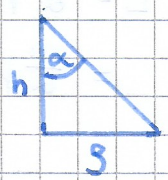
$$
\begin{aligned}
[\text{rot}\,\vec{K}]_i &= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})]_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, a_l\, [\vec{b} \times \vec{r}]_m \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, \varepsilon_{mno}\, a_l\, b_n\, r_o \\
&= \varepsilon_{ijk}\, (\varepsilon_{mkl}\, \varepsilon_{mno})\, \partial_j\, a_l\, b_n\, r_o \\
&= \varepsilon_{ijk}\, (\delta_{kn}\delta_{lo} - \delta_{ko}\delta_{ln})\, \partial_j\, a_l\, b_n\, r_o \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, (a_l\, b_k\, r_l - a_l\, b_l\, r_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\, (a_l\, b_k \underbrace{\partial_j r_l}_{=\delta_{jl}} - a_l\, b_l \underbrace{\partial_j r_k}_{=\delta_{jk}}) \\
&= \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k}_{[\vec{a} \times \vec{b}]_i} - \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, a_l\, b_l\, \delta_{jk}}_{=0 \text{ weil } \delta_{jk} = 0 \text{ für } j \neq k,\ \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ für } j = k} \\
&= \underline{\underline{[\vec{a} \times \vec{b}]_i}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Im Allgemeinen existiert kein Potential.

② Unendlich ausgedehnte Platte mit Loch: (Aufgabe 7.)

Von letzter Woche ist bekannt: $\vec{F} = -mG2\pi \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \sigma \sin\alpha \, d\alpha$

- suche andere Integrationsgrenze:



Es gilt: $\varrho = \tan\alpha \cdot h$ setze $\varrho = R$

$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{R}{h}\right)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{F} &= -mG2\pi\sigma \int_{\alpha = \arctan\left(\frac{R}{h}\right)}^{\pi/2} \sin\alpha \, d\alpha \\
&= -mG2\pi\sigma \left[-\cos\alpha\right]_{\arctan\left(\frac{R}{h}\right)}^{\pi/2} \\
&= -mG2\pi\sigma \left[\cos\left(\arctan\left(\frac{R}{h}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Trigonomet. Pythagoras

Es gilt die bekannte Relation: $\frac{1}{\cos^2\varphi} = \tan^2\varphi + 1$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\arctan\left(\frac{R}{h}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = -mG\,2\pi\sigma \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}}}$$

③ Energie- und Drehimpulserhaltung im Gravitationsfeld ↗ S. 13 (nicht behandelt)

Wir zeigen: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$ für $V(r) = -\frac{k}{r}$

Die Gesamtenergie setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

NR: $$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi} + r^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ &\quad + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi} + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ &= \underline{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \qquad (\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi) \end{aligned}$$

Betrachte den Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L} &= \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \\ &= \vec{r} \times \left(m\dot{r}\,\hat{e}_r + mr\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi\right) \\ &= m\left(\vec{r}\times\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{r}\times\hat{e}_\varphi\right) \\ &= m\Big(r\dot{r}\,\underbrace{\hat{e}_r\times\hat{e}_r}_{=0} + r^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\hat{e}_r\times\hat{e}_\varphi}_{=\hat{e}_z}\Big) \\ &= \underline{m r^2\dot{\varphi}\,\hat{e}_z} \end{aligned}$$

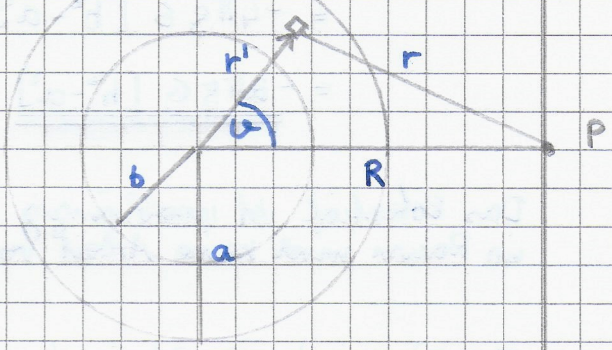
$$\Rightarrow |\vec{L}|^2 = m^2r^4\dot{\varphi}^2 = \ell^2 \qquad \Rightarrow \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)}_{\text{effektives Potential}} \end{aligned}$$

3. Tutorium – Theoretische Mechanik

④ Gravitationspotential einer Kugelschale

- konstante Massendichte $\varrho(r')$
- Gesamtmasse: $M = \int \varrho(r')\, dV$



$$M = \varrho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta'\, d\vartheta'}_{=2} \int_a^b r^2\, dr$$

$$= \underline{\underline{4\pi (b^3 - a^3) \frac{\varrho}{3}}} \quad (1)$$

Gravitationspotential:

$$\Phi(R) = -G \int \frac{\varrho(r')}{r}\, d^3r'$$

$$= -G\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{r}\, d\vartheta \int_a^b r'^2\, dr'$$

Nach dem Kosinussatz folgt: $r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\vartheta$

$$\Rightarrow 2r\,dr = 2r'R\sin\vartheta\, d\vartheta \qquad \text{(für gegebenes } r'\text{)}$$

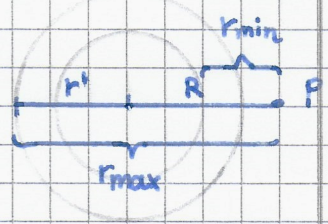
$$\frac{dr}{r'R} = \frac{\sin\vartheta}{r}\, d\vartheta$$

$$\Rightarrow \Phi(R) = -G\varrho\, 2\pi \int_a^b r'^2\, dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r'R}$$

$$= -2\pi\varrho \frac{G}{R} \int_a^b r'\, dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr$$

Fall 1) Sei der Punkt P außerhalb der Kugelschale

Es gilt: $r_{max} = R + r'$
$r_{min} = R - r'$



$$\Rightarrow \Phi(R>a) = -2\pi\varrho \frac{G}{R} \int_a^b r'\, dr' \left[R + r' - (R - r')\right]$$

$$= -4\pi\varrho \frac{G}{R} \int_a^b r'^2\, dr'$$

$$= -4\pi\varrho \frac{G}{R} \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

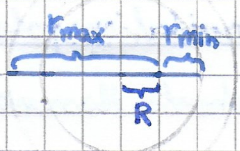
Mit (1) folgt:

$$\Phi(R>a) = -\frac{GM}{R}$$

Potential ist gleich dem eines Massenpunktes in der Mitte der Kugelschale.

Fall 2) Sei der Punkt P innerhalb der Kugelschale

Es gilt: $r_{max} = R + r'$
$r_{min} = r' - R$



$$\Rightarrow \Phi(r<b) = -2\pi \rho G \frac{1}{R} \int_a^b r' \, dr \, [R + r' - (r' - R)]$$
$$= -4\pi \rho G \, [b^2 - a^2] \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \underline{\underline{-2\pi \rho G \, [b^2 - a^2]}}$$

Das Potential ist unabhängig von R. Zur Bewegung des Teilchens im Raum wird keine Arbeit verrichtet. Es ist kräftefrei.

Fall 3) Sei der Punkt in der Kugelschale

- Aufteilung in zwei Kugelschalen (a, R) und (R, b) und Summation der Potentiale.

$$\Phi(b<R<a) = -4\pi \rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6} \right)$$